



Die unwahrscheinliche Zeitung

„Miniprojekt zur Darstellung der Stochastik in der Mittelschule



aus dem Lehrplan:

Klasse 7:

Beherrschen des Durchführens und Auswertens von Zufallsversuchen Ergebnis, Ergebnismenge, Ereignis

- Urliste, Strichliste, absolute und relative Häufigkeit

Einblick gewinnen in die Stabilisierung relativer Häufigkeiten

Kennen des Begriffs Wahrscheinlichkeit

Beurteilen von Darstellungen zu statistischen Erhebungen

Klasse 8:

Einblick gewinnen in die Simulation von Zufallsversuchen, auch mit Taschenrechner und Computer (Monte-Carlo-Methode)

Kennen abhängiger und unabhängiger Ereignisse

Übertragen des kombinatorischen Zählens auf das Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten (Schreibweise $n!$) \times

Beherrschen des Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten für Ergebnisse und Ereignisse bei mehrstufigen Zufallsversuchen mit Hilfe des

Baumdiagramms und der Pfadregeln

Klasse 9:

Sich positionieren zu Darstellungen und Inhalten von Datenerhebungen (Medien als Informationsquellen --> Prognose, Wahl, Infrastruktur, Trend, Wirtschaftlichkeit von Unternehmen

Medien als Einflussfaktor auf Meinungen

Medien als Instrument bewusster Verfremdung von Wirklichkeit (Art und Weise der Datenerfassung)

Anwenden der Kenntnisse über Häufigkeitsverteilungen und über ihre Aussagekraft auf Beispiele aus der Umwelt, auch unter Verwendung der Tabellenkalkulation

arithmetisches Mittel, Zentralwert, Modalwert (auch Beispiele, bei denen mindestens zwei der Mittelwerte wesentlich voneinander abweichen)

Maximum, Minimum Spannweite, Standardabweichung

Gestalten eines Projekts zu einer statistischen Erhebung aus dem Lebensumfeld Kaufverhalten, Freizeitverhalten Mehrperspektivität

Klasse 10:

Einblick gewinnen in die Verwendung von Zufallsgrößen - anschauliches Verwenden von Zufallsgrößen, die eine endliche Anzahl von Werten annehmen können

Kennen des Erwartungswertes einer Zufallsgröße als Kenngröße zur Beurteilung von Sachsituationen

Unterschied zwischen Gewinnchance und Gewinnerwartung bei Spielen Risikoabschätzung bezüglich Ausfall von technischen Geräten

Kennen der Simulation von einstufigen Zufallsversuchen

Kapitel 1: Zusammenstellung und Anwendungen der Begriffe Zufallsversuchen Ergebnis, Ergebnismenge, Ereignis !!!
Kapitel 2: Zusammenstellung und Anwendungen der Begriffe Urliste, Strichliste, absolute und relative Häufigkeit
Kapitel 3: Das Gesetz der großen Zahl (Stabilisierung relativer Häufigkeiten)
Kapitel 4: Der Begriff der Wahrscheinlichkeit (Anwendungen)
Kapitel 5: Die Monte-Carlo-Methode (Hinweis – solche Tabellen findest du im Mathelexikon bei schulmodell.de)
Kapitel 6: abhängige und unabhängige Ereignisse (Tipp: ohne bzw. mit Zurücklegen)
Kapitel 7: Wie oft geht das? - Permutation
Kapitel 8: Wie oft geht das? - Kombination
Kapitel 9: Wie oft geht das? - Variation
Kapitel 10: Baumdiagramme – Anwendungen und Regeln
Kapitel 11: Grundbegriffe der Statistik 1: arithmetisches Mittel, Zentralwert, Modalwert
Kapitel 12: Grundbegriffe der Statistik 2: Maximum, Minimum, Spannweite, Standardabweichung
Kapitel 13+14: Eigene Umfrage zum Freizeitverhalten (ca. 10 Fragen) entwickeln und in zwei Klassen durchführen und darauf die Kapitel 11 und 12 anwenden
Kapitel 15: Begriff und Verwendung von des Begriffs Zufallsgröße
Kapitel 16: Der Erwartungswert als „Aussagenhilfe“ bei Gewinnspielen
Kapitel 17: Der Erwartungswert als „Aussagenhilfe“ bei Risikoabschätzung bezüglich Ausfall von technischen Geräten
Kapitel 18: Untersuche die Abschlussprüfungen bzgl. Aufgaben, die zur Zeitung passen. Den Kapiteln zuordnen und „passende“ Aufgabenstellungen entwickeln.

Zufallsexperiment, Ergebnismenge, Ereignis, Ergebnis

Zufallsexperiment:

Bei einem Zufallsexperiment hat man mindestens zwei mögliche Ergebnisse. Bei jeder Durchführung wird mindestens eines von beiden erzielt. Dabei ist jedoch nicht vorhersehbar, welches der möglichen Ergebnisse eintritt.

Bsp.:

Mögliche Ergebnisse beim Würfeln von Zahlen mit einem Würfel.

$E = \{(1,2,3,4,5,6)\}$

$(0,7,8,9) \rightarrow$ fallen weg, weil man diese Zahlen nicht würfeln kann.

Oder das ziehen von zwei Kugeln, mit roten und schwarzen Kugeln.

$E = \{(r,r) ; (s,s) ; (r,s) ; (s,r)\}$

Ergebnismenge:

Ist die Menge aller möglichen Ergebnisse, die bei einem Zufallsexperiment eintreten.

Ereignis:

Ist die Teilmenge der Ergebnismenge. Man spricht von einem Ereignis, wenn eines seiner Ergebnisse der Ausgang des Zufallsexperiments ist.

$E = \{(4,5,6)\} \rightarrow$ ist die Teilmenge der gesamten Ergebnisse!!!

Ergebnis:

Sind die eintretenden Ereignisse. Also, die nun wirklich eingetreten sind.

Beispielaufgabe:

Ist die Wette über den Ausgang eines Fußballspiels ein Zufallsexperiment?

Lösung:

Die Wette ist beliebig oft wiederholbar.

Es gibt drei mögliche Ergebnisse (Sieg, Unentschieden, Niederlage)

Das Ergebnis ist nicht vorhersagbar.

Also ist die Wette über den Ausgang eines Fußballspiels ein Zufallsexperiment!

Urliste, Strichliste, absolute und relative Häufigkeit

Urliste:

Eine Urliste ist eine Liste von ungeordneten Ergebnissen irgendeiner Berechnung. Das Gegenteil von der Urliste ist eine geordnete Liste. Dabei werden die Ergebnisse in Reihenfolge von unten nach oben bzw. von oben nach unten aufgelistet.

Bsp. mit Größen:

Urliste: 1, 87 m; 1, 56 m; 1, 67 m; 1,98 m; 1, 59 m; 1, 75 m

geordnete Liste: 1, 56 m; 1, 59 m; 1,67 m; 1,75 m; 1,87 m; 1,98 m

Strichliste:

Eine Strichliste wird häufig zum Erfassen von Daten verwendet. Dabei wird jedes gesuchte Ergebnis das Auftreten durch einen Strich auf der Liste gezählt. Zur besseren Übersicht wird in 5er-Blöcken aufgezeichnet. Jeder fünfte Strich wird quer durch die vorherigen vier gezogen.

Bsp. mit roten und grünen Autos:

Es werden 25 Autos gezählt. Davon sind sechs rot und vier grün.

Strichliste rot: IIII I

Strichliste grün: IIII

Absolute Häufigkeit:

Die Absolute Häufigkeit beschreibt in der Wahrscheinlichkeit die Anzahl des Eintretens eines bestimmten Ergebnisses bei beliebig vielen Versuchen.

Bsp. mit Würfeln:

Es wird 15 mal gewürfelt. Dabei kommt die Augenzahl 4 dreimal vor. Die absolute Häufigkeit ist hier die 3.

Relative Häufigkeit:

Die Relative Häufigkeit beschreibt das Verhältnis eines bestimmten Ergebnisses E zur Gesamtzahl n aller Versuche.

relative Häufigkeit= absolute Häufigkeit: Gesamtzahl der Versuche

Bsp. mit Würfeln:

Es wird 10 mal gewürfelt. Dabei kommt die Augenzahl 3 zweimal vor.

relative Häufigkeit= 2:10

In Prozent: $(2:10) \cdot 100\% = 20\%$

Aufgaben:

1. Bringe die Weitsprungergebnisse in eine geordnete Liste:

Urliste: 3,95 m; 4, 60 m; 4, 10 m; 3,80 m; 4,97 m; 5, 01 m; 3, 80 m; 2, 90 m

2. Erfasse die absolute und relative Häufigkeit jeder Augenzahl bei Würfeln mit einem Würfel. Schreibe die Ergebnisse in eine geordnete Liste. Es wird 20 mal gewürfelt. Die Ergebnisse: 2;5;1;3;6;2;2;4;1;5;6;3;4;4;1;6;5;1;6;2

3. Das empirische Gesetz der großen Zahlen

Führt man ein Zufallsexperiment sehr oft durch, so stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ergebnisse.

Das heißt, umso häufiger man ein Zufallsexperiment testet, umso mehr liegt das Ergebnis bei der wirklichen Wahrscheinlichkeit („reelle“ Wahrscheinlichkeit) .

Bei der relativen Häufigkeit heißt es

$$h_n(A) = H_n(A)/n$$

H_n - Anzahl der eingetretenen Fälle

n - Anzahl der Versuche

Bsp.:

Das Ziehen eines Buben (4) in einem Skatenspiel (32 Karten), wenn die Karten immer wieder zurück gelegt werden. (bei 32 Versuchen)

$2/32 =$ relative Häufigkeit

Die Wahrscheinlichkeit liegt aber bei $4/32 =$ Wahrscheinlichkeit

4 - Anzahl der günstigen Fälle

32- Anzahl der möglichen Fälle

Deshalb könnte nach dem Gesetz der großen Zahlen in einem längerem Experiment das Ergebnis so ausfallen (128 Versuche):

$16/128 =$ relative Wahrscheinlichkeit

So würde sich das Ergebnis der Wahrscheinlichkeit anpassen. Man kann dies auch bei der Monte-Carlo-Methode beobachten. Umso mehr Zahlen ich dabei benutze, umso mehr komme ich an die „reelle“ Wahrscheinlichkeit.

Wahrscheinlichkeit

„Die relative Häufigkeit für das Eintreten eines Ergebnisses E bei einer großen Anzahl von Versuchen, schwankt um einen festen Wert, dieser wird Wahrscheinlichkeit P(E) genannt.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit nach LAPLACE-REGEL:

$$P(E) = \frac{A_g E}{A_m E}$$

Die Anzahl der für E günstigen Ergebnisse($A_g E$) / die Anzahl der möglichen Ergebnisse($A_m E$).

Beispiel:

1. Beim einmaligen Werfen eines „idealen“ Würfels beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis „Augenzahl5“ also:

$$P(5) = \frac{1}{6} \sim 0,167 \sim 16,7\%$$

2. Jetzt hat man 2 Würfel, somit 36 Ergebnisse.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis „Augenzahl6“ beträgt:

$$P(5) = \frac{5}{36} \sim 0.138 \sim 13,8\%$$

Absolute und relative Häufigkeit:

absolute Häufigkeit ($H_n(E)$): Die absolute Häufigkeit gibt an wie oft ein Ergebnis, bei einer bestimmten Anzahl von Wiederholungen aufgetreten ist.

relative Häufigkeit ($h_n(E)$): Die relative Häufigkeit ist die absolute Häufigkeit dividiert durch die Anzahl der Ergebnisse, sie hat einen Wertebereich zwischen 0 und 1.

Aufgaben:

1. In einer Urne befinden sich 2 rote und 6 blaue Kugeln, die sich nur in der Farbe unterscheiden. Es werden nacheinander 2 Kugeln gezogen, ohne die ersten Kugeln wieder zurückzulegen.

Berechne für folgende Ergebnisse die Wahrscheinlichkeit:

- beide Kugeln sind rot
- die Kugeln haben verschiedene Farben
- mindestens 1 Kugel ist rot
- beide Kugeln sind blau

2. Aus einer Klasse mit 15 Jungen und 10 Mädchen werden zwei Personen zufällig ausgewählt.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es zwei Mädchen sind.

Monte-Carlo-Methode

Eine besonders effektive Methode der Simulation ist die Verwendung von **Zufallszahlen**, die auch als **Monte-Carlo-Methode** bezeichnet wird. Zufallszahlen entstehen z.B., wenn als Zufallsgenerator ein Glücksrad mit 10 gleichen Sektoren verwendet wird, auf denen die Zahlen 0 bis 9 stehen. Wird das Glücksrad mehrfach gedreht, erhält man eine Folge von einstelligen Zahlen, die alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

Einstellige Zufallszahlen können in einer Zufallszahlentabelle angegeben werden. Zur besseren Übersicht sind immer 5 Zahlen zu einer Gruppe zusammengefasst und die Zeilen sowie die Spalte mit den Fünfergruppen sind nummeriert. Eine Zufallszahlentabelle hat folgende Eigenschaften:

- Jede der Zahlen von 0 bis 9 tritt mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 auf.
- Jede zweistellige, dreistellige bzw. n-stellige Zahl, die in der Tabelle durch Zusammenfassen benachbarter Ziffern gebildet wird, tritt mit der Wahrscheinlichkeit 0,01; 0,001 bzw. 10^{-n} auf.
- Zur Bildung einer Folge einstelliger oder mehrstelliger Zufallszahlen kann man an einer beliebigen Stelle in der Tabelle beginnen und in Zeilen- oder Spaltenrichtung weitergehen.

1	6667	3046	92544	50887	40106	82951	16882	51398	59113	56334
2	7438	11106	31310	67197	05616	96330	74827	73984	52694	65185
3	88149	84617	69141	91580	94353	71999	57762	74636	30555	74723
4	71817	28917	87564	74847	58803	37809	28109	82774	56113	59743
5	50130	56837	76596	48926	37359	61846	10634	78152	83832	47139
6	77703	77452	17370	74980	17390	64878	85656	93348	65593	57846
7	86316	38115	99065	66800	77627	98482	06948	58669	26932	59940
8	91763	46184	49134	09265	19212	47231	23299	63582	03217	61688
9	20741	09922	04633	69728	02123	99567	38812	01293	49812	17299
10	19232	52218	94686	98717	16798	01530	54077	33954	85953	54236
11	05284	08662	62670	41446	92287	64188	88306	81548	71149	18062
12	75594	25944	72313	09554	43558	47643	92841	27712	19441	84030
13	47403	24099	38123	35107	32686	76180	13853	17826	75598	92312
14	04462	14923	94780	09882	56715	60891	19656	97180	48516	52631
15	89860	32121	33199	78697	73625	27881	97083	01524	75784	66335
16	10972	50038	13621	93355	73041	51894	31528	78881	70532	63699
17	27222	48328	85938	71660	84037	30190	01724	96338	12406	38805
18	88992	72282	28301	80714	63613	35215	70479	74192	32172	25207
19	67039	46467	94742	61680	92309	53474	24227	16353	15899	06174
20	26757	60118	53275	09244	55034	94111	63738	49860	71409	90814
21	37930	43564	62745	59545	62602	60242	67961	01457	81065	52407
22	06967	12737	90587	69914	79676	23874	57043	85659	44093	76267
23	64731	35412	87991	37703	74774	15032	70653	78920	11710	94874
24	14892	20734	91456	83475	59630	73460	97577	70743	14469	15353
25	81254	33779	87744	41526	94140	05630	92228	65143	13087	53915
26	50064	07971	06429	29434	85793	44745	30637	14401	61804	72426
27	80169	51425	05579	28378	43024	49782	37243	20472	08855	78305
28	25927	47716	94329	75923	22117	69690	12514	35216	80123	19911
29	24435	20480	40201	73794	47569	97988	01244	86435	48578	74143
30	69015	01399	20055	53206	75422	30654	91403	91420	45140	60390
31	06559	78943	44494	78621	76681	65104	20176	05409	75324	80342
32	52920	08529	04012	62703	78810	30165	42734	74336	23135	39710
33	08890	92009	64138	51294	91804	34405	41420	52352	31745	60690
34	08299	72413	05448	59095	32707	27886	89508	47099	49483	34333
35	86667	38426	10661	40959	89838	26369	74631	37989	69025	16612
36	69152	08834	80943	08197	06618	23594	86391	69043	43347	74684
37	39000	93452	83923	18313	66600	47506	94604	70715	09992	20152
38	42812	86937	63124	59430	04093	32447	69041	23727	48150	51005
39	11921	25370	13918	03286	92408	56067	57840	07534	55857	76194
40	78619	57653	30024	02266	72258	93402	88159	10775	01513	02639
41	30156	04945	23338	34811	41303	70534	57472	07701	32475	30011
42	26356	72726	18355	66247	47984	52554	77003	68540	25960	42766
43	40449	99145	61362	63027	14211	35311	05250	24939	59186	44956
44	77198	23364	57072	09703	65373	91896	56376	29056	50367	66737
45	09337	73953	60908	62867	42888	54538	23857	52048	30930	70357
46	00988	74327	15191	85490	23117	28754	45444	22855	67077	16266
47	38940	66842	39773	20616	18315	03239	86881	85879	00878	20881
48	40981	59583	56945	12090	99087	91770	92091	25083	34038	55154
49	15324	11699	68278	30348	68362	11737	14256	67826	89406	24668
50	52788	90063	78894	56139	71822	55611	57326	21638	00780	13626

Beispiel:

In einer Tüte sind insgesamt 10 Kugeln(2 rote, 3 gelbe, 5 blaue)
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit das ich 2mal die gleiche Farbe ziehe? Nutze dazu in der Tabelle oben die Zeilen 1 – 2, um denn Versuch zu simulieren.

Rote: 1,2
gelbe:3,4,5
blaue:6,7,8,9,0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
16	5	11	9	9	13	8	10	6	7

Gesamtanzahl: 94

Kapitel 6 – abhängige und unabhängige Ereignisse

Ereignisse:

In der Wahrscheinlichkeitstheorie versteht man unter Ereignis, auch Zufallsereignis genannt, eine messbare Menge von Ergebnissen eines Zufallsexperimentes, wie z.B. eine gewürfelte Augenzahl.

abhängige Ereignisse:

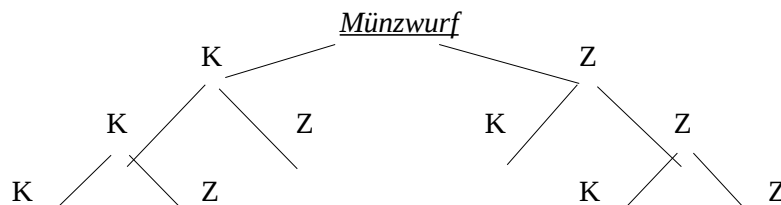
– bedeutet, dass sich die Wahrscheinlichkeit ändert, z.B. wenn man 2 rote und 3 gelbe Kugeln hat, dann ist die Wahrscheinlichkeit größer eine Gelbe zu ziehen. Ziehe ich eine gelbe Kugel, ist die Wahrscheinlichkeit dann bei dem nächsten ziehen 50:50.

unabhängige Ereignisse:

– bedeutet ,dass sich die Wahrscheinlichkeit nie ändert, z.B. wenn man wieder 2 rote und 3 gelbe Kugeln gegeben hat, dann ist die Wahrscheinlichkeit größer eine gelbe Kugel zu ziehen. Ziehe ich eine gelbe Kugel und lege sie wieder zurück ändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht.

1.Beispiel:

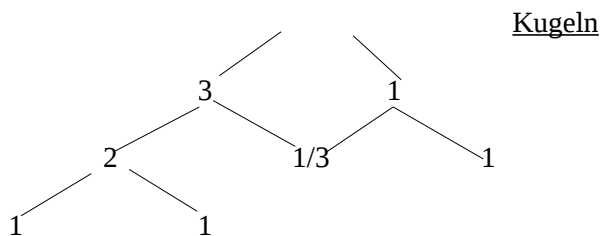
Beim Münzwurf handelt es sich um unabhängige Ereignisse, weil....?



sich die Ereignisse nie verändern es besteht immer nur eine 50:50 Chance für Kopf oder Zahl.

2.Beispiel:

In einer Tüte sind 3 blaue und eine rote Kugel enthalten. Der Spieler nimmt nach und nach zwei Kugeln (ohne zurücklegen). Hierbei handelt es sich um abhängige Ereignisse ,weil....?



sich die Wahrscheinlichkeit bei jedem ziehen nach der roten Kugel ändert. Man hat nur zwei Versuche so dass es beim letzten Zug eine 33,33% Chance beim ziehen der roten Kugel gibt, während es am Anfang nur eine 25% Chance gibt.

Aufgaben:

1. Ein Kartenspieler hat 5 Karten vor sich liegen. Auf einer davon ist ein Symbol, doch er weiß nicht auf welcher. Er hat nur drei Versuche, muss aber wenn er eine Karte ohne Symbol aufgedeckt hat sie zurück legen und alle Karten wieder miteinander mischen. Um welches der oben genannten

Ereignisse handelt es sich - begründe? Und wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit die Karte mit dem Symbol zu bekommen?

2. Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Welches der Ereignisse könnte hier zugeteilt werden?

Permutation aus dem (Mathematiklexikon)

Wenn es darum geht, wie viele Möglichkeiten gibt es n Dinge anzuordnen, dann spricht man von Permutation.

Alfred, Bernd und Charles sollen sich in einer Reihe aufstellen, dann gibt es 6 Möglichkeiten. ABC, ACB, BAC, BCA, CAB und CBA,

Sind die Dinge alle verschieden - **keine Wiederholung** - dann hat das erste Element n Möglichkeiten zum Ausschuchen. (das A hat drei vorn, Mitte, hinten). Wenn das passiert ist gibt es noch 2 Möglichkeiten für B, Wenn der gewählt hat bleibt für C nur der ein Platz übrig. Es sind also $3*2*1$ Möglichkeiten.

Bei der Anzahl n sind das $n*(n-1)*(n-2)*...*1 = n!$ (siehe Fakultät)

Sind die Dinge nicht alle verschieden - **mit Wiederholung** - z.B.: AAABCD, dann gilt für die Möglichkeiten in dem konkreten Fall: $6!/3! = 720/6 = 120$.

Kombination

In einer Urne sind zwei Kugeln (Nr. 1 und Nr. 2), und man soll einmal zwei Kugeln ziehen. Die Kombination sagt, dass man nur die Möglichkeit hat, Kugel 1 und Kugel 2 zu ziehen, die Reihenfolge ist egal.

Im Gegensatz dazu ist bei der Variation die Reihenfolge wichtig. Also entweder 1 – 2 oder 2 – 1

Wenn man mit einem Würfel 2 mal Würfeln soll, hat man die Möglichkeiten 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 4-4, 4-5, 4-6, 5-5, 5-6, 6-6,

Kombination ohne Wiederholung

Ziehung von k Kugeln (ohne Zurücklegen) bei n unterscheidbaren Kugeln (Die Reihenfolge spielt keine Rolle).

Kombination mit Wiederholung

Ziehung von k Kugeln (mit Zurücklegen) bei n unterscheidbaren Kugeln (Die Reihenfolge spielt keine Rolle. Die Möglichkeiten sind nicht gleich wahrscheinlich!)

Beispiel Kombination ohne Wiederholung (Lotto)

Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n*(n-1)*(n-2)*...*(n-k+1)}{k!} \quad (\text{Binomialkoeffizient, gelesen } n \text{ über } k)$$

Beim Lotto 6 aus 49 wird 6 mal gezogen, wobei man bei der ersten gezogenen Kugel 49 Möglichkeiten hatte, bei der zweiten gezogenen Kugel noch 48, bei der dritten noch 47, bei der vierten 46, bei der fünften 45 und bei der sechsten noch 44, weil die gezogenen Kugeln ja nicht wieder zurückgelegt werden und deshalb weniger Kugeln in der Urne sind.

Bei der Formel ist n also die **Anzahl der verbleibenden Kugeln** (am Anfang 49, dann noch 48, 47, 46, 45, 44), und k die **Anzahl der zu ziehenden Kugeln** (6).

Die Fakultät von k nimmt man, weil man z. B. die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 in 6!

($1*2*3*4*5*6$) verschiedenen Arten ziehen kann (1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 6, 5, 4, 3, 2, 1, ...)

Für 6 aus 49 würde die Formel also lauten $\frac{49*48*47*46*45*44}{6!} = \underline{13.983.816}$

Man hätte also 13.983.816 verschiedene Kombinationen, in der die 49 Zahlen gezogen werden können.

Beispiel Kombination mit Wiederholung

Wenn man die Kugeln beim Lotto nach jedem Zug wieder zurück legen würde, wäre es eine Kombination mit Wiederholung.

Die Formel für die Berechnung sähe dann so aus:

$$\frac{n+(k-1)!}{k!*(n-1)!}$$

Also, für das Beispiel mit den Lottozahlen:

$$\frac{49+(6-1)!}{6!*(49-1)!} = \underline{25.827.165}$$

Beispiele zum Selberrechnen:

1. Man hat 6 Menschen und 6 Stühle. Sie sollen sich nacheinander wahllos auf die Stühle setzen. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es? (Achtung: der erste hat noch 6 Möglichkeiten, der zweite nur noch 5, usw.)
2. In einer Gummibärentüte sind 5 verschiedene Sorten Bären. Du greifst Mal 7 mal rein und nimmst jedes Mal 3 Bären raus. Nach jedem Zug legst die Gummibärchen wieder zurück. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die du in der Hand halten kannst?

Variationen Judith

- **wichtig: Reihenfolge der Stichproben**
- **--> die Anordnung AB ist nicht dasselbe wie BA, es wird doppelt gezählt**

Variationen ohne Wiederholung:

(Ziehung von Kugeln k (ohne Zurücklegen) bei unterscheidbaren Kugeln n (Die Reihenfolge ist wichtig)).

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Anzahl der Möglichkeiten:

! =(n bis k) 1*2*3*4*...n

(Bsp.: n= 4, k= 2 --> (4-2)= 2 --> 4*3 = 12 = Anzahl der Möglichkeiten)

Du musst als von n (hier:4) bis zur Differenz von n-k (hier:4-2=2) runter rechnen, immer mal. Die letzte Zahl (hier: 2) darf nicht mehr mit mal gerechnet werden. So kommt man hier auf 4*3).

(Bsp.: n= 8, k=3 --> (8-3) = 5 --> (8*7*6= 336 = Anzahl der Möglichkeiten)

Hier kommt man durch dieses Prinzip auf 8*7*6.

Variationen mit Wiederholung:

(Ziehung von Kugeln k (mit Zurücklegen) bei unterscheidbaren Kugeln n (Die Reihenfolge ist wichtig)).

Anzahl der Möglichkeiten (N): n^k

Unterschied Kombinationen - Variationen

Die Aufgabe ist, aus 2 Kugeln (welche mit 1 und zwei nummeriert sind) 2 Kugeln zu ziehen.
Für eine Kombination ergibt sich hier nur eine Möglichkeit, nämlich schlicht die zwei Kugeln zu ziehen.

Bei einer Variation hat man zwei Möglichkeiten, nämlich zuerst die Kugel mit der 1 und dann die Kugel mit der zwei oder umgekehrt zu ziehen.

Beispiele:

Lotto 6 aus 49 mit Ziehungsreihenfolge – (kein so gutes Beispiel)

Wie viele Möglichkeiten gibt es, k=6 Zahlen von n=49 unterscheidbaren Zahlen zu ziehen, wenn die Zahlen nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge wichtig ist?

Für die Zahl der Möglichkeiten gilt (Die Möglichkeiten sind alle gleich wahrscheinlich):

$$N_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{(Variationen ohne Wiederholung)}$$

$$N_{49,6} = 49! / 43! = 49 \sum 48 \sum 47 \sum 46 \sum 45 \sum 44 = 10068347520$$

Antwort: Es gibt 10068347520 Möglichkeiten.

Zahlenschloss am Fahrrad

Wie viele Möglichkeiten hat ein k=4 stelliges Zahlenschloss mit n=6 Ziffern an jeder Stelle?

Für die Zahl der Möglichkeiten gilt (die Möglichkeiten sind alle gleich wahrscheinlich):

$$N_{n,k} = n^k \quad \text{(Variationen mit Wiederholung)}$$

$$N_{6,4} = 6^4 = 1296$$

Es gibt 1296 Möglichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeit, den richtigen Code des Fahrradschlusses zu erraten, beträgt dann:

$$\frac{P_{n,k}}{N_{n,k}} = \frac{1/N_{n,k}}{N_{n,k}} = \frac{1}{N_{n,k}} = 1 / 1296 = 0.0007716 = 0.07716\%$$

Aufgaben:

- Auswahl von 2 Elementen (k) aus möglichen 4 Elementen (n) . Wie viel Möglichkeiten mit Wiederholung, wie viele ohne Wiederholung?
- Vier Menschen sollen sich auf 6 Stühle setzen. Wie viele Möglichkeiten gibt es (ohne Wiederholung)?
- Aus 10 Menschen soll eine Vierergruppe gebildet werden. Wie viele Möglichkeiten

gibt es? (ohne Wiederholung)

- Aus 6 Kugeln sollen 3 gezogen werden. Wie viele Möglichkeiten (mit Wiederholung) gibt es?

Baumdiagramme

Mit einem Baumdiagramm kann man die Wahrscheinlichkeiten anschaulich ausrechnen und mehrstufige Zufallsexperimente grafisch darstellen.

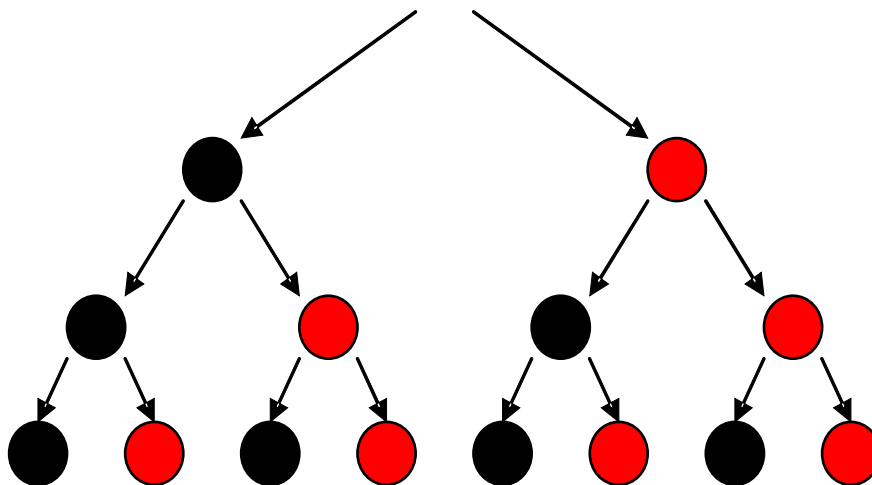
Die Wahrscheinlichkeiten an einem Knoten müssen, wenn man sie zusammenrechnet, dabei immer 1 ergeben.

Man muss zwischen 2 Baumdiagrammen entscheiden:

- eines bei dem die Ergebnisse voneinander abhängig sind, d.h. wenn ich z.B. Kugeln aus einer Urne ziehe und sie nicht wieder zurück tue wird die Anzahl der Kugeln in der Urne weniger, deshalb wird die Anzahl aller Ergebnisse auch kleiner.
- und eines bei dem die Ergebnisse unabhängig voneinander sind, z.B. beim Würfeln, der Würfel merkt sich im Normalfall nicht welche Ergebnisse (z.B. 1, 2 und 3) schon eingetreten sind und kann daher nicht entscheiden das jetzt ein anderes Ergebnis kommt (z.B. eine 6).

In einer Urne sind 5 rote und 3 schwarze Kugeln. Es wird dreimal gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

- a) drei rote Kugeln mit Zurücklegen
 - b) mindestens zwei schwarze Kugeln mit Zurücklegen
 - c) und drei rote Kugeln ohne Zurücklegen zu ziehen?
- a) und b)



um die Wahrscheinlichkeit für das erwartete Ereignis (ziehen von 3 roten Kugeln) auszurechnen muss ich als erstes den Pfad mit 3 roten Kugeln aussuchen und alle Wahrscheinlichkeiten an diesem Pfad multiplizieren (1. Pfadregel: die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse am Pfad multiplizieren = Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses):

$$\frac{5}{8} * \frac{5}{8} * \frac{5}{8} = \frac{125}{512}$$

Als nächstes muss ich alle Wahrscheinlichkeiten der Pfade addieren (Pfadregel 2) aber da ich nur ein Pfad habe kann ich nichts addieren. Wenn ich jetzt noch die Prozentzahl haben will rechne ich mir den Bruch aus und multipliziere ihn mit 100% :

$$\frac{125}{512} * 100\% = 24,41\%$$

Die Wahrscheinlichkeit das man 3 rote Kugeln hintereinander zieht beträgt 24,41%.

um die Wahrscheinlichkeit für die mindestens 2 schwarzen Kugeln auszurechnen suche ich mir wieder den Pfad (oder die Pfade) mit 2 oder mehr schwarzen Kugeln; ich multipliziere wieder die Wahrscheinlichkeiten an den Pfaden:

$$\frac{5}{8} * \frac{3}{8} * \frac{3}{8} = \frac{45}{512} \quad \text{und} \quad \frac{3}{8} * \frac{3}{8} * \frac{3}{8} = \frac{27}{512}$$

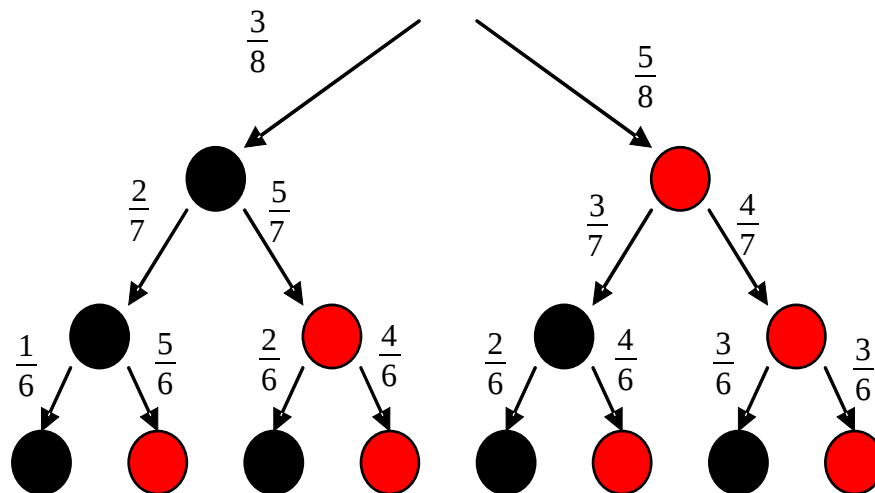
Nun addiere ich die Wahrscheinlichkeiten von den Pfaden:

$$\frac{27}{512} + \frac{45}{512} = \frac{72}{512} \quad \text{Um jetzt noch die Prozentzahl zu erhalten rechne ich den Bruch aus und multipliziere mit 100 \% :$$

$$\frac{72}{512} * 100\% = 14,06\%$$

Die Wahrscheinlichkeit 2 oder mehr schwarze Kugeln zu ziehen liegt bei 14,06%

c)



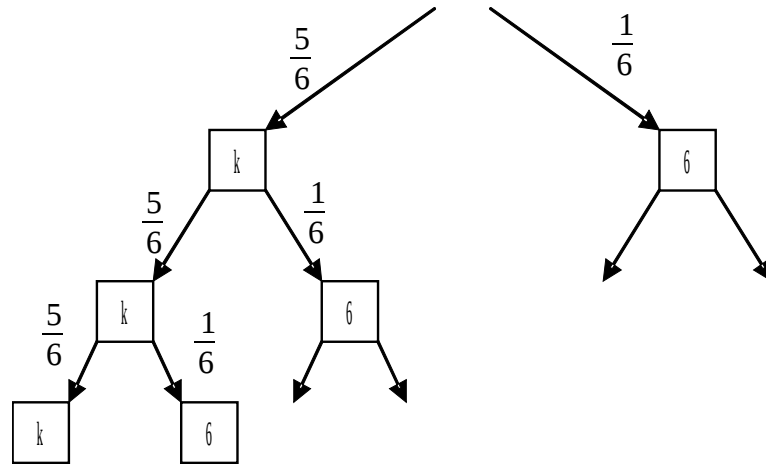
Bei diesem Zufallsexperiment gehe ich genau wie oben vor, also suche ich mir wieder als erstes den passenden Pfad und multipliziere die Wahrscheinlichkeiten:

$$\frac{5}{8} * \frac{4}{7} * \frac{3}{6} = \frac{60}{336} \quad \text{Nun addiere ich wieder die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, doch es gibt keine weiteren Pfade deren Ergebnisse mit dem erwarteten Ergebnis übereinstimmen, daher kann ich nichts addieren. Nun rechne ich wieder die Prozentzahl aus:}$$

$$\frac{60}{336} * 100\% = 17,85\%$$

Die Wahrscheinlichkeit das ich 3 rote Kugeln ziehe ohne eine Kugel zurück zu legen liegt bei 17,85%.

Beim Mensch ärgere dich nicht darf man am Anfang 3 mal würfeln, bei einer 6 darf man eine Spielfigur ins Feld setzen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit das man spätestens bis zum 3 mal würfeln eine 6 hat?



Ich habe das Baumdiagramm nicht vollständig abgebildet, weil die restlichen Ereignisse für mich nicht relevant sind, ich will ja nicht ausrechnen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit für 3 mal hintereinander eine 6 zu würfeln ist, ich will nur ausrechnen wie hoch die Wahrscheinlichkeit für eine 6 innerhalb von 3 mal würfeln ist. Und da ich beim 2. Pfad schon beim 1. Mal würfeln eine 6 hab muss ich ihn nicht weiter ergänzen.

Als erstes wende ich wieder Pfadregel 1 an: - da ich beim 2. Pfad gleich eine 6 hab bleibt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$

beträgt die $\frac{5}{6} * \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$ - wenn ich beim 2. Mal würfeln eine 6 hab Wahrscheinlichkeit

die $\frac{5}{6} * \frac{5}{6} * \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$ -wenn ich beim 3. Mal würfeln eine 6 hab beträgt Wahrscheinlichkeit

Nun addiere ich wieder alle Wahrscheinlichkeiten (Pfadregel 2):
(Damit es einfacher geht erweitere ich alle Brüche, so das sie alle den gleichen Nenner habe)

$$\frac{1}{6} * 36 = \frac{36}{216}$$

$$\frac{5}{36} * \frac{6}{6} = \frac{30}{216}$$

$$\frac{25}{216} = \frac{25}{216}$$

$$\frac{36}{216} + \frac{30}{216} + \frac{25}{216} = \frac{91}{216}$$

$$\frac{91}{216} * 100\% = 42,16\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ich eine 6 würfle beträgt 42,16%.

Manchmal ist es auch einfacher die Wahrscheinlichkeit für das umgekehrte Ereignis auszurechnen. Soll heißen, dass ich für keine 6 bei 3 mal würfeln die Wahrscheinlichkeit ausrechne:

$$\frac{5}{6} * \frac{5}{6} * \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

$$\frac{216}{216} - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

So erhalte ich auch die Wahrscheinlichkeit

für mein günstiges Ereignis.

Aufgaben:

1. In einem Korb liegen 6 schwarze, 4 blaue und 2 graue Socken. Jemand nimmt blind zwei Socken heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide die gleiche Farbe haben?
2. Ein Student darf bei einer Prüfung 2 von 30 Prüfungsfragen ziehen. Er hat 25 Fragen gelernt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
 - a. beide Fragen
 - b. die erste, aber nicht die zweite Frage
 - c. mindestens eine Frage beantworten kann?
3. In einem Geldbeutel befinden sich fünf 1-Euro-, vier 2-Euro- und ein 5-Euro-Stück(e). Zwei Münzen werden zufällig herausgenommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Summe
 - a. genau 3 Euro
 - b. mehr als 5 Euro beträgt?

Grundbegriffe der Statistik Kapitel 11

Das Arithmetische Mittel

Das Arithmetische Mittel ist einfach ein anderes Wort für „Durchschnitt“. Berechnet wird es folgendermaßen: Man addiert alle Ergebnisse einer Messreihe und rechnet das Ergebnis dann durch die Anzahl der Ergebnisse (Beachte wegen Punkt vor Strich-Rechnung muss erst die Summe ausgerechnet werden bevor diese dann geteilt wird).

Beispiel: Ergebnisse der Messreihe 7;13;27

Rechnung: $7+13+27=47$

$47:3$ (die Anzahl aller Ergebnisse der Messreihe)=15,666667

Also ist das Arithmetische Mittel der Ergebnisse gleich 15,666667

Aufgabe für euch: Berechnet das Arithmetische aus den Werten 1;2;4;5;10?

Der Zentralwert

wenn man alle Ergebnisse der Messreihe der Größe nach ordnet, dann ist der Wert in der Mitte der Zentralwert

Beispiel: Ergebnisse der Messreihe 7;13;27

13 ist der Zentralwert, da er in der Mitte steht.

Ist die Anzahl von Ergebnissen ungerade, dann wird aus den beiden mittleren Zahlen das Arithmetische Mittel errechnet.

Beispiel: Ergebnisse der Messreihe 7;13;27;47

$13+27=40$

$40:2=20$

Aufgabe für euch: Was ist der Zentralwert bei 1;2;4;5;10;13?

Der Modalwert

Der Modalwert ist bei einer Messreihe der am häufigstem vorkommende Wert. gibt es keinen am häufigstem vorkommenden Wert, gibt es auch keinen Modalwert.

Beispiel: Ergebnisse der Messreihe 7;13;13;27

13 ist der Modalwert

Ergebnisse der Messreihe 7;13;27

kein Modalwert vorhanden

Aufgabe für euch: was ist der Modalwert bei den Werten 3;4;5;4;6?

Grundbegriffe der Statistik 2

Varianz:

Die Varianz ist ein Streumaß, zu dessen Berechnung jeweils die Differenzen zwischen den einzelnen Ergebnissen und dem Mittelwert quadriert werden. Diese Quadrate werden anschließend aufsummiert und durch $n - 1$ geteilt

$$s^2 = (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) / n - \text{Anzahl} - \text{Mittelwert}^2$$

Standardabweichung:

$$\text{Standardabweichung} = \sqrt{\text{Varianz}}$$

Spannweite (Spann- oder Variationsbreite):

Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Ergebnis einer Stichprobe

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

$$R = 15, 16, 75, 62, 24, 43,9$$

$$R = 75 - 9$$

$$R = 66$$

Minimum:

Das Minimum ist das kleinste Ergebnis z.b. bei einer Umfrage der Körpergröße.

Die kleinste Körpergröße ist dann z.b. das Minimum.

Maximum:

Das Maximum ist das größte Ergebnis z.b. bei einer Umfrage der Körpergröße.

Die größte Körpergröße ist dann z.b. das Maximum.

Beispielaufgabe:

Zehn Männer wurden nach ihrer Körpergröße (in cm) gefragt.

Urliste:

175, 169, 183, 179, 174, 190, 182, 177, 186, 189

Geordnete Urliste:

169, 174, 175, 177, 179, 182, 183, 186, 189, 190

Mittelwert:

$$= (169+174+175+177+179+182+183+186+189+190)/10 = 180,4 \text{ cm}$$

Varianz und Standardabweichung:

$$V(x) = (169^2+174^2+175^2+177^2+179^2+182^2+183^2+186^2+189^2+190^2)/10 - 180,4^2 = 42,04$$

$$s = \sqrt{42,04} = 6,48$$

$$\text{Spannweite: } R = 190 - 169 = 21$$

Maximum: 169

Maximum: 190

Kapitel 13 und 14: Fragebogen zur Freizeitgestaltung
In Verbindung mit Kapitel 11 und 12

25 befragte Leute

- **Frage 1)** *Wie oft bist du in deiner Freizeit an der Luft?*

oft (4) manchmal (16) selten (5)

- Modalwert = „manchmal“ (16/25)

- arithmetisches Mittel: $4+16+5 \div 3 = 8,3$ (arith. Mittel liegt zwischen „manchmal“ und „selten“)

- **Frage 2)** *Treibst du Sport?*

ja (15) nein (10)

- Modalwert = „ja“ (15/25)

- arithmetisches Mittel: $15+10 \div 2 = 12,5$ (arith. Mittel liegt zwischen „ja“ und „nein“)

- **Frage 3)** *Wie oft triffst du deine Freunde in deiner Freizeit?*

oft (17) manchmal (7) selten (1)

- Modalwert = „oft“ (17/25)

- arithmetisches Mittel: $17+7+1 \div 3 = 8,3$ (arith. Mittel liegt zwischen „oft“ und „manchmal“)

- **Frage 4)** *Schätze, wie viele Stunden du am Tag fernsiehst!*

0-1h (12) 1-3h (9) mehr als 3h (4)

- Modalwert = 0-1h (12/25)

- arithmetisches Mittel: $12+9+4 \div 3 = 8,3$ (arith. Mittel liegt zwischen „0-1h“ und „1-3h“)

- **Frage 5)** *Liest du gern Bücher?*

oft (3) manchmal (16) selten (6)

- Modalwert = „manchmal“ (16/25)

- arithmetisches Mittel: $3+16+6 \div 3 = 8,3$ (arith. Mittel liegt zwischen „manchmal“ und „selten“)

- **Frage 6)** *Wirst du in den nächsten Ferien einen Ferienjob machen?*

ja (9) nein (16)

- Modalwert = „nein“ (16/25)

- arithmetisches Mittel: $9+16 \div 2 = 12,5$ (arith. Mittel liegt zwischen „ja“ und „nein“)

- **Frage 7)** *Schätze, wie viele Stunden du am Tag vor dem PC verbringst!*

0-1h (12) 1-3h (10) mehr als 3h (3)

²- Modalwert = „0-1h“ (12/25)

- arithmetisches Mittel: $12+10+3 \div 3 = 8,3$ (arith. Mittel liegt zwischen „0-1h“ und „1-3h“)

Frage 8) *Wie viel Taschengeld bekommst du im Monat?*

- Urliste: 25€; 15€; 18€; 20€; 10€; 35€; 32€; 38€; 12€; 15€; 15€; 20€; 25€; 18€; 25€; 25€; 10€; 10€; 15€; 10€; 20€; 20€; 25€; 30€; 35€

- geordnete Urliste: 10€; 10€; 10€; 10€; 12€; 15€; 15€; 15€; 15€; 18€; 18€; 20€; 20€; 20€; 25€; 25€; 25€; 25€; 25€; 30€; 32€; 35€; 35€; 38€

- Modalwert = 38€

- arithmetisches Mittel: 20,92€

Varianz: $(10^2+10^2+10^2+10^2+12^2+15^2+15^2+15^2+15^2+18^2+18^2+20^2+20^2+20^2+25^2+25^2+25^2+25^2+25^2+25^2+30^2+32^2+35^2+35^2+38^2)$ - arithmetisches Mittel (20,92)

= 28,02€

Standardabweichung: $\sqrt{28,02} = 5,29$ €

Minimum: 10€, 10€, 10€, 10€
Maximum: 38€

Zufallsgröße

Definition:

Die Zufallsgröße X ist eine Funktion. Diese ordnet jedem Ergebnis eines bestimmten Ergebnisraumes Ω eine reelle Zahl zu.

Beispiel: In einem Kartenspiel gibt es folgende Karten: **Ass, Zehn, König, Dame, Bube, Neun, Acht, Sieben**. Diese bilden zusammen den Ergebnisraum, da dies die möglichen Ergebnisse beim Ziehen einer Karte aus einem vollständigen Kartenstapel sind.

$\Omega = \{ \text{Ass, Zehn, König, Dame, Bube, Neun, Acht, Sieben} \}$

Jeder Karte wird ein bestimmter Wert, die Punktzahlen, zugeordnet:

Ass=11; Zehn=10; König=4; Dame=3; Bube=2; Neun, Acht, Sieben=0

Die Zufallsgröße entspricht dem Wert der gezogenen Karte. Dieser Versuch kann beliebig oft wiederholt werden.

Die Zufallsgröße ist die Größe, die dem Ergebnis verschiedener, unter gleichen Bedingungen durchgeführter Versuche, so genannte Zufallsexperimenten, zugeordnet wird. Es wird vorher festgelegt, welchem Ergebnis welche Zahl zugeordnet wird. Die Zufallsgröße gleicher Ergebnisse ist immer gleich. Das Ergebnis eines jeden Versuchs ist rein zufällig, die damit verbundene Zufallsgröße auch; sie wird deshalb auch „zufälliges Ereignis“ genannt.

Man unterscheidet zwischen stetiger und diskreter Zufallsgröße.

Stetige Zufallsgröße: Die Zufallsgröße kann bei einem bestimmten Experiment (mehrere Versuche unter gleichen Bedingungen mit der selben Fragestellung) unendlich (unzählbar) viele Werte annehmen. Dazu könnte unter anderem das Sterbealter eines Menschen gezählt werden.

Diskrete Zufallsgröße: Die Zufallsgröße kann bei einem bestimmten Experiment endlich (zählbar) viele Werte annehmen kann. Dazu zählt zum Beispiel das Würfeln: Es sind nur sechs verschiedene Augenzahlen möglich.

Die Zufallsgröße ist wichtig für die Ermittlung des Erwartungswerts.

Aufgabe:

In einer Urne befinden sich 16 Kugeln. Der Ergebnisraum $\Omega = \{ \text{rot, blau, grün, orange} \}$. Von jeder Farbe sind gleich viele Kugeln vorhanden, die der Reihe nach gezogen werden. Schreibe die Zufallsgrößen für die Ziehung der ersten 10 Kugeln auf: r, r, g, o, b, r, b, o, b, g Für die Ziehung einer roten Kugel gibt es 5€, für eine blaue 3€, für orange 1€ und für eine Grüne Kugel nichts. Handelt es sich um eine stetige oder um eine diskrete Zufallsgröße?

Kapitel 16

Matthias Keussen

Der Erwartungswert

Gegeben sei eine Verteilung, die den Werten x_1, x_2, x_3, \dots einer Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3, \dots zuordnet.

Die Zahl $E(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + \dots + x_k * p_k$ heißt Erwartungswert.

Der Erwartungswert gibt an, welcher durchschnittliche Wert ungefähr zu erwarten ist, wenn

man eine Zufallsgröße sehr häufig beobachtet. Mit ihm kann gewissermaßen eine Vorhersage über das arithmetische Mittel der Werte gemacht werden. Führt man umgekehrt einen Zufallsversuch sehr häufig durch, so kann das arithmetische Mittel der beim Versuch auftretenden Werte als Schätzwert für den Erwartungswert der Zufallsgröße dienen. Der Erwartungswert X muss unter den Werten der Zufallsgrößen nicht vorkommen.

Beim Würfeln eines Würfels zu betrachtende Augenzahl A sind nur die Werte

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$ und $x_6 = 6$ möglich

Die einzelnen Werte x_1, x_2, x_3, \dots einer Zufallsgröße X treten mit bestimmten

Wahrscheinlichkeiten $p_1 = P(x_1), p_2 = P(x_2), p_3 = P(x_3)$

Verteilungen diskreter Zufallsgrößen werden meist in Form einer Tabelle der folgenden Art angegeben. Für die Augenzahl beim Werfen eines idealen Wurfes ergibt sich:

Wert (x_1, x_2, x_3, \dots)	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit (p_1, p_2, p_3, \dots)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Für die Augenzahl A beim Werfen eines idealen Wurfes erhält man folgenden

Erwartungswert: $E(A) = 1 * 1/6 + 2 * 1/6 + 3 * 1/6 + 4 * 1/6 + 5 * 1/6 + 6 * 1/6 = 3,5$

Mit Hilfe der Berechnung von Erwartungswerten lassen sich beispielsweise Gewinne, etwa im kaufmännischen Bereich optimieren und Glücksspiele bewerten (Stichwort: faires Spiel).

Beispielaufgabe:

Von 200 Losen einer Tombola sind 2 Gewinne zu 25 Euro, 5 Gewinne zu 10 Euro, 10

Gewinne zu 5 Euro und 25 zu 2 Euro. Alle anderen Lose gewinnen nichts. Für den Gewinn G liegt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung vor:

Gewinn in €	25	10	5	2	0
Wahrscheinlichkeit	2/200 = 0,01	5/200 = 0,025	10/200 = 0,05	25/200 = 0,125	158/200 = 0,79

Als Erwartungswert für Gewinn G ergibt sich somit:

$E(G) = 25 * 0,01 + 10 * 0,025 + 5 * 0,05 + 2 * 0,125 + 0 * 0,79 = 1$

Antwort: Nur bei einem Lospreis von 1 Euro würde es sich um ein faires Spiel handeln.

Bei Gewinnspielen muss der Erwartungswert immer Null ergeben, sonst wäre es kein faires Spiel.

Beispielaufgaben zum Rechnen:

1. Eines der folgenden fünf Wörter wird zufällig gezogen: MATTHIAS WILL UNBEDINGT INS SNOWBOARDLAGER. (dann mach was) Berechne folgende Erwartungswerte:

a) Anzahl der Buchstaben des gezogenen Wortes.

b) Anzahl der Vokale des gezogenen Wortes.

c) Anzahl der Buchstaben A des gezogenen Wortes

2. Berechnen den Erwartungswert, beim Münzwurf, die Anzahl der Wappen, wenn:

a) einmal geworfen wird.

b) zweimal geworfen wird.

c) viermal geworfen wird.

d) achtmal geworfen wird.

Quellen: Schüler Duden Mathematik

Kapitel 17: der Erwartungswert als "Aussagenhilfe" bei Risikoabschätzung

bezüglich Ausfall von technischen Geräten. Die unten angeführte Tabelle samt Werte stammt von www.tecchannel.de. Für die Richtigkeit wird keine Haftung übernommen.

Alle Folgenden Berechnungen sind nur für ein Einzelgerät.

LAUF- UND AUSFALLZEITEN eine Festplatte.

TBF (in Stunden)	TTR (in Stunden)
120	2
528	5

	288	0,5
	120	0,5
	72	5
	192	8,5
	480	0,5
	60	2
	120	0,5
Summe	1980	24,5
Mittelwert	220	2,72
Anzahl Ereignisse	9	9

Man bildet aus dem Werten einen Mittelwert.

Muss an dieser stelle nicht noch einmal erklärt werden.

Dieses mach man für die Mean Time Between Failure (Zeitzwischen den Ausfällen)

$MTBF=1980h/9= 220h$

Ebenso berechnet sich die durchschnittliche Reparaturzeit (MTTR, Mean Time to Repair)

$MTTR = 24,5h/9 = 2,72h$ also 2h und 43 min

Bringt man nun die beiden Werte zusammen in eine abgewandelte Formel der Erwartungswertberechnung, erhält man die Wahrscheinlichkeit wie man auf die Festplatte zählen kann.

Funktionstüchtig = $MTBF/(MTBF+MTTR) = 220h/(220h+2,72h)*100 = 98,78\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Festplatte verfügbar ist, berechnet man in dem man die Formel umkehrt.

nicht Funktionstüchtig = $MTTR/(MTBF+MTTR) = 2,72h /(220h + 2,72h)*100 = 1,22\%$

Beim Taschenrechner erst $2,72h /(220h + 2,72h)$ ausrechnen. Dann ANS mal 100.

Oder für die Fauleren und wenn beide Werte wichtig sind ganz einfach

$100\%-98.78\%=1.22\%$

Auch das könnt ihr natürlich Umkehren.

Nun habe ich diesen Wert für ein Gerät. Nun kann man es auch auf mehrere Geräte übertragen.

Dafür brauchen wir natürlich noch mehr solche Wertetabellen.

LAUF- UND AUSFALLZEITEN einen Prozessorkühler.

TBF (in Stunden)	TTR (in Stunden)	
320	3	
600	2.5	
743	1	
56	4	
89	3	
922	10	
773	0,5	
40	3	
844	0,5	
Summe	4387	24
Mittelwert	487	2,67
Anzahl Ereignisse	9	9

Nun wie oben die Zuverlässigkeit aurechnen $487h/(487h+2,67)*100\%=99.46\%$

LAUF- UND AUSFALLZEITEN eine Grafikkarte.

TBF (in Stunden)	TTR (in Stunden)
------------------	------------------

	350	5
	457	7
	475	9
	10	8
	355	3
	700	5
	38	5
	300	0.5
	656	0,5
Summe	3344	24,5
Mittelwert	371	4,77
Anzahl Ereignisse	9	9

Auch hier funktioniert das $656h / (656 + 4,77) * 100\% = 99,27\%$ ist es Einsatzfähig.

In dem ich wieder die Gesamt Zuverlässigkeit zu erhalten rechne ich alle zusammen in einer Rechnung $((220h / (220h + 2,72h)) + (487h / (487h + 2,67)) + (656h / (656 + 4,77))) / 3 = 0,9917$ nun habe ich den Gesamten Wert der Zuverlässigkeit um die Prozentzahl zu bekommen muss ich alles noch mal 100% nehmen und ich erhalte eine Zuverlässigkeit von 99.17%.

Weiter hin kann ich nun die Prozentwerte auf die ganzen großen Büros anwenden. Ich denke ich muss nicht noch ein mal erklären wie ich heraus bekomme wie viel der 120399023 Festplatten ausfallen bei 98.78%.

Beispielaufgabe:

Glühbirnen Weihnachtsmarkt

TBF in h	TTR in h
645	4.5
757	9
929	11
744	8
647	7.5
848	12
35	3.5
843	4
738	10
382	8
Mittelwert	Mittelwert

Stromverteiler für die Lichterkette

TBF in h	TTR
734	3
122	7
343	12

23	3
234	4
444	9
677	8
676	4
545	2
Mittelwert	Mittelwert

Wie oft fällt die Lichterkette am Tag aus?(man bedenke den Stromverteiler)
 Wenn die Funktionsprozent an einer Birne getestet würde wie viele Funktionieren dann bei 67437 nicht.?

Bitte schön meine Klasse und VIEL SPAß!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! damit.

Kapitel 18 Ronja

Diese Aufgaben befinden sich im roten Prüfungsheft und sind Teil der Realschulprüfungen gewesen. Oft sogar als eine Pflichtaufgabe! Du kannst sie versuchen sie mit Hilfe der Zeitung zu lösen und dir dann die Lösungen ansehen (diese sind eigentlich sehr gut erklärt).

Seite	Teil	Aufgabe	Kapitel in der Zeitung zur Hilfe
1	A	1	1,4,7
2	B	1	11,12
23	B	3	10,1,4,6,8
40	A	9	4
57	A	2	10,4,6
59	B	4	11,12
76	B	3	1,4,5
102	B	1	1,6
118	A	4	11
120	B	4	2,11,12
139	B	3	1,4
156	B	4	1,7,4
2006-3	B	3	10,4
2007-5	B	4	4,6,8
2008-4	B	4	1,4,6

Hier noch welche ohne Lösungen zum Selbstrechnen:

1. Die Schüler der Klasse 10 bekommen im Monat gesamt folgende Taschengeldbeträge:

22 10 12 20 54 15 60 8 8 10 20 21 40 18
 25 62 50 5

Ermittle aus den Daten die Spannweite, das arithmetische Mittel und den Zentralwert.

2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zweimal hintereinander eine 6 zu würfeln?

3. Auf wie viele Arten kann man 7 Gäste in 10 Hotelzimmern (Einzelzimmer) verteilen?